

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

IDENTIFIKACIJE
Zbirka rešenih nalog

Sašo Blažič

Ljubljana 2007

Predgovor

Delo je namenjeno študentom četrtega letnika smeri Avtomatika na univerzitetnem študiju programa Elektrotehnika. Vsebuje rešene primere problemov s področja identifikacije dinamičnih sistemov. Za lažje razumevanje so v gradivu najprej podane osnove teoretičnega ozadja obravnavane problematike. Tudi pri rešitvah nalog so na praktičnih primerih obravnavane nekatere teoretične vsebine. Vsebina skripte se dopolnjuje z učbenikom Identifikacije (Drago Matko, Založba ZAFER, Ljubljana, 1992) in Zbirko vaj Praktikum identifikacij dinamičnih sistemov (Juš Kocijan, Založba FE in FRI, Ljubljana, 1998).

V gradivu je zbranih nekaj rešenih primerov iz snovi predmeta Identifikacije. Trenutno obsega skripta le nekaj nalog iz vsakega poglavja, ki pride v poštev pri pisnem izpitu. V prihodnosti nameravam gradivo razširiti. Ta različica skripte je prva, tako da se že vnaprej opravičujem za vse napake.

Ljubljana, junij 2007

Sašo Blažič

Kazalo

1	Koncepti teorije sistemov in signalov	1
1.1	Vhodni signali	1
1.1.1	Trapezni impulz	1
1.1.2	Beli šum	1
1.1.3	Barvni šum	2
1.1.4	Zvezni naključni binarni signal	2
1.1.5	Diskretni naključni binarni signal	2
1.1.6	Psevdonaključni binarni signal	3
2	Neparametrične identifikacijske metode	5
2.1	Fourierova analiza	5
2.2	Analiza frekvenčnega odziva	8
2.2.1	Vrednotenje frekvenčnega odziva z vzorčevalnikom z vzorčenjem v dveh časovnih trenutkih	9
2.2.2	Metoda ortogonalne korelacije	9
2.3	Korelacijska analiza	15

3	Parametrične identifikacijske metode	17
3.1	Metoda najmanjših kvadratov	17

Poglavje 1

Koncepti teorije sistemov in signalov

1.1 Vhodni signali

1.1.1 Trapezni impulz

Fourierova transformacija trapeznega impulza:

$$U(\omega) = U_0 T_2 \frac{\sin \frac{\omega T_1}{2}}{\frac{\omega T_1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega T_2}{2}}{\frac{\omega T_2}{2}} e^{-\frac{j\omega T}{2}} \quad (1.1)$$

kjer je T trajanje impulza, T_1 je čas vzpona, T_2 pa čas do začetka padanja.

1.1.2 Beli šum

Zvezni beli šum je signal, katerega avtokorelacijska funkcija je δ -impulz z amplitudo Φ_0 :

$$\phi_{vv}(\tau) = \Phi_0 \delta(\tau) \quad (1.2)$$

kjer je Φ_0 močnostna gostota šuma, ki je seveda enaka v celotnem frekvenčnem območju:

$$\Phi_{vv}(\omega) = \Phi_0 \quad (1.3)$$

1.1.3 Barvni šum

Barvni šum dobimo iz belega šuma s filtriranjem belega šuma preko filtra. Najbolj pogosto se za filter uporabi kar nizkoprepustni filter prvega reda s časovno konstanto T_g oz. mejno frekvenco ω_g :

$$G_n(s) = \frac{1}{1 + sT_g} \quad T_g = \frac{1}{\omega_g} \quad (1.4)$$

Spektralna močnostna gostota in avtokorelacijska funkcija takšnega – pasovno omejenega šuma se izračunata s pomočjo naslednjih formul:

$$\begin{aligned} \Phi_{nn}(\omega) &= |G_n(j\omega)|^2 \Phi_0 = \frac{\Phi_0}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \\ \phi_{nn}(\tau) &= \frac{\Phi_0 e^{-|\tau|\omega_g}}{2} \omega_g \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.1.4 Zvezni naključni binarni signal

Zvezni naključni binarni signal je signal, ki lahko zavzame le dve vrednosti, in sicer a in $-a$. Prehod med tema vrednostma je naključen. Predpostavimo, da je povprečje menjav predznaka (n) v časovnem intervalu Δt podano s Poissonovo porazdelitvijo:

$$P(n) = \frac{(\mu \Delta t)^n}{n!} e^{-\mu \Delta t} \quad (1.6)$$

Ob takšni predpostavki lahko pokažemo, da ima avtokorelacijska funkcija zveznega naključnega binarnega signala za $a^2 = \frac{\Phi_0}{2} \omega_g$ in $\mu = \frac{\omega_g}{2}$ enak potek kot avtokorelacijska funkcija širokopasovnega šuma (1.5).

1.1.5 Diskretni naključni binarni signal

Diskretni naključni binarni signal zavzame (tako kot zvezni naključni binarni signal) le dve vrednosti, tudi menjava predznaka se zgodi naključno. Od zveznega naključnega binarnega signala se loči po tem, da spremembe lahko nastopijo le ob diskretnih trenutkih $k\lambda$ ($k \in \mathbb{Z}$). Avtokorelacijska funkcija in spektralna

močnostna gostota sta:

$$\begin{aligned}\phi_{uu}(\tau) &= \begin{cases} a^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\lambda}\right) & |\tau| < \lambda \\ 0 & |\tau| \geq \lambda \end{cases} \\ \Phi_{uu}(\omega) &= a^2 \lambda \left(\frac{\sin \frac{\omega \lambda}{2}}{\frac{\omega \lambda}{2}} \right)^2\end{aligned}\tag{1.7}$$

1.1.6 Psevdonaključni binarni signal

Pri psevdonaključnem binarnem signalu (PNBS) spremembe predznaka niso povsem naključne, ampak jih definira poseben bitni algoritem, zaradi česar je PNBS periodičen signal, perioda pa je relativno dolga. Diskretna avtokorelacijska funkcija PNBS je enaka

$$\phi_{nn}^d(\tau_i) = \begin{cases} a^2 & \tau_i = 0 \\ -\frac{a^2}{N} & 0 < \tau_i < N \end{cases}\tag{1.8}$$

in je seveda periodičen signal s periodo N (N je tudi perioda PNBS):

$$\phi_{nn}^d(\tau_i \pm iN) = \phi_{nn}^d(\tau_i) \quad i \in \mathbb{Z}\tag{1.9}$$

Spektralna močnostna gostota PNBS je:

$$\Phi_{nn}^d(m) = \begin{cases} \frac{a^2}{N} & m = 0 \\ a^2(1 + \frac{1}{N}) & 0 < m < N \end{cases}\tag{1.10}$$

Primer 1.1 Pasovno omejen šum (dobimo ga iz belega šuma s filtriranjem preko nizkoprepustnega filtra prvega reda z mejno krožno frekvenco ω_g) ima enako močnostno gostoto (pri $\omega = \omega_g$) kot diskretni naključni binarni signal s časom vzorčenja λ in amplitudo $\pm a$, če izberemo $\omega_g \lambda = 1,8$. Izračunajte razmerje moči obeh šumov.

Močnostna gostota pasovno omejenega šuma je pri $\omega = \omega_g$ po enačbi (1.5) enaka:

$$\Phi_{nn}(\omega_g) = \frac{\Phi_0}{1 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_g}\right)^2} = \frac{\Phi_0}{2}\tag{1.11}$$

Močnostna gostota diskretnega naključnega binarnega signala je pri $\omega = \omega_g$ po enačbi (1.7) enaka:

$$\Phi_{uu}(\omega_g) = a^2 \lambda \left(\frac{\sin \frac{\omega_g \lambda}{2}}{\frac{\omega_g \lambda}{2}} \right)^2\tag{1.12}$$

Ker sta spektralni močnostni gostoti (1.11) in (1.12) enaki, velja:

$$\Phi_0 = 2a^2\lambda \left(\frac{\sin \frac{\omega_g\lambda}{2}}{\frac{\omega_g\lambda}{2}} \right)^2 \quad (1.13)$$

Moč signala je enaka njegovi varianci, ki pa je enaka vrednosti avtokorelacijske funkcije pri premiku $\tau = 0$. Razmerje moči pasovno omejenega šuma (POS) in diskretnega naključnega binarnega signala (DNBS) je enako:

$$\frac{\sigma_{POS}^2}{\sigma_{DNBS}^2} = \frac{\phi_{POS}(0)}{\phi_{DNBS}(0)} = \frac{\frac{\Phi_0}{2}\omega_g}{a^2} \quad (1.14)$$

Ko vstavimo enačbo (1.13) v enačbo (1.14), dobimo:

$$\frac{\sigma_{POS}^2}{\sigma_{DNBS}^2} = \frac{2a^2\lambda \left(\frac{\sin \frac{\omega_g\lambda}{2}}{\frac{\omega_g\lambda}{2}} \right)^2 \omega_g}{2a^2} = \frac{4}{\omega_g\lambda} \sin^2 \frac{\omega_g\lambda}{2} = 1,3636 \quad (1.15)$$

Poglavje 2

Neparametrične identifikacijske metode

Neparametrična identifikacijska metoda je vsak postopek, pri katerem na osnovi merjenja signalov, ki vstopajo v sistem ali iz njega izstopajo, določimo enega od neparametričnih modelov identificiranega sistema. Neparametrični model sistema je lahko odziv na impulzni, stopničasti ali kakšen drug signal, zelo pogosto pa se uporablja tudi frekvenčni odziv procesa, ki je lahko upodobljen v Bodejevem, Nyquistovem, Nicholsovem diagramu ali kako drugače. V tem delu se bomo omejili na naslednje neparametrične identifikacijske metode: Fourierovo analizo, analizo frekvenčnega odziva in korelacijsko analizo.

2.1 Fourierova analiza

Pri Fourierovi analizi identifikacijo izvajamo z neperiodičnim preizkusnim signalom. Rezultat identifikacije je frekvenčni odziv identificiranega sistema

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} \quad (2.1)$$

kjer sta $Y(\omega)$ in $U(\omega)$ Fourierovi transformaciji izhodnega in vhodnega signala:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ U(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

Varianca napake frekvenčnega odziva $\Delta G_n(j\omega)$ zaradi motenega prehodnega pojava se izračuna po naslednji enačbi:

$$E\{|\Delta G_n(j\omega)|^2\} = \sigma_{G_{abs}}^2(\omega) = \frac{\Phi_{nn}(\omega)}{\Phi_{uu}(\omega)} \approx \frac{\Phi_{nn}(\omega)T_A}{|U(\omega)|^2 m} \quad (2.3)$$

pri čemer je pomen veličin v enačbi (2.3) naslednji:

- $\sigma_{G_{abs}}^2(\omega)$ je varianca absolutne napake ocenjenega frekvenčnega odziva, ki je seveda odvisna od frekvence ω ,
- $\Phi_{nn}(\omega)$ je spektralna močnostna gostota motilnega signala $n(t)$,
- $\Phi_{uu}(\omega)$ je spektralna močnostna gostota vzbujalnega signala $u(t)$,
- T_A je čas opazovanja odziva,
- m pa je število ponovitev poskusa.

Standardno deviacijo napake frekvenčnega odziva $\Delta G_n(j\omega)$ zaradi motenega prehodnega pojava torej lahko podamo v obliki absolutne ali relativne napake frekvenčnega odziva:

$$\begin{aligned} \sigma_{G_{abs}}(\omega) &= \frac{\sqrt{\Phi_{nn}(\omega)T_A}}{|U(\omega)|\sqrt{m}} \\ \sigma_{G_{rel}}(\omega) &= \frac{\sqrt{\Phi_{nn}(\omega)T_A}}{|G(j\omega)||U(\omega)|\sqrt{m}} = \frac{|G_n(j\omega)|\sqrt{\Phi_0 T_A}}{|G(j\omega)||U(\omega)|\sqrt{m}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

kjer smo pri zadnji enačbi predpostavili, da je izhodni šum $n(t)$ dobljen iz belega šuma s spektralno močnostno gostoto Φ_0 s filtriranjem preko filtra s prenosno funkcijo $G_n(s)$.

Pri uporabi neperiodičnih signalov pa obstaja še drug vir napak, to je ocena stacionarnih vrednosti signalov. Če ustaljeno stanje izhodnega signala ocenjujemo na intervalu dolžine T_B in je motilni signal $n(t)$ beli šum, pridemo naslednjo dodatno varianco napake frekvenčnega odziva:

$$\sigma_{G_{abs}}^2(\omega) = E\{|\Delta G_{\Delta Y}(j\omega)|^2\} = \frac{\Phi_0}{\omega^2 |U(\omega)|^2 T_B m} \quad (2.5)$$

Primer 2.1 Sistem identificiramo z metodo Fourierove analize. Testni signal je pravokotni impulz dolžine 1 in velikosti 2. Poiščite prenosno funkcijo sistema, če je Fourierova transformacija izhodnega signala:

$$Y(\omega) = \frac{18 \sin \frac{\omega}{2}}{\omega(6 + 20j\omega)^3} e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad (2.6)$$

Izhodni signal je moten s šumom, ki ga modeliramo s šumnim filtrom

$$G_n(j\omega) = \frac{1}{1 + 50j\omega} \quad (2.7)$$

Standardna deviacija šuma je 0,25% ustaljene vrednosti odziva sistema na enotino stopnico. Določi razmerje časa opazovanja proti številu poizkusov tako, da bo napaka frekvenčnega odziva pri $\omega = 0,03$ enaka 6%.

Najprej prepišimo podatke:

$$T = 1$$

$$U_0 = 2$$

$$T_g = 50$$

$$\sigma_n = 0,0025 y_\infty$$

$$\sigma_{G_{rel}}(0,03) = 0,06$$

$$G(s) = ?$$

$$\frac{T_A}{m} = ?$$

Fourierova transformacija pravokotnega impulza je:

$$U(\omega) = U_0 T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}} = 2 \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad (2.8)$$

Frekvenčni odziv sistema dobimo z deljenjem Fourierovih transformacij izhodnega in vhodnega signala (enačbi 2.6 in 2.8):

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{9}{16(3 + 10j\omega)^3} \quad (2.9)$$

Iskana prenosna funkcija je torej:

$$\boxed{G(s) = \frac{9}{16(3 + 10s)^3}} \quad (2.10)$$

Sedaj lahko določimo ustaljeno vrednost odziva sistema na enotino stopnico. Uporabimo teorem končne vrednosti:

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = G(0) = \frac{1}{48} \quad (2.11)$$

Standardna deviacija šuma je:

$$\sigma_n = 0,0025 y_\infty = \frac{0,0025}{48} = 5,2083 \cdot 10^{-5} \quad (2.12)$$

Relativna napaka frekvenčnega odziva ocenjenega signala se izračuna po enačbi:

$$\sigma_{G_{rel}}(\omega) = \frac{|G_n(j\omega)| \sqrt{\Phi_0 T_A}}{|G(j\omega)| |U(\omega)| \sqrt{m}} \quad (2.13)$$

V tej enačbi poznamo vse veličine razen Φ_0 in $\frac{T_A}{m}$, ki jo iščemo. Standardna deviacija barvnega šuma σ_n je povezana z avtokorelacijsko funkcijo šuma pri premiku 0 ($\phi_{nn}(0)$) ter spektralno močnostno gostoto šuma Φ_0 pri nizkih frekvencah:

$$\sigma_n^2 = \phi_{nn}(0) = \frac{\Phi_0 \omega_g}{2} = \frac{\Phi_0}{2T_g} \Rightarrow \Phi_0 = 2T_g \sigma_n^2 = 2,7127 \cdot 10^{-7} \quad (2.14)$$

Oceniti je potrebna še dva frekvenčna odziva in eno Fourierovo transformacijo pri $\omega = 0,03$:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| \Big|_{\omega=0,03} &= \frac{9}{16 (\sqrt{9 + 100\omega^2})^3} \Big|_{\omega=0,03} = 0,0205 \\ |G_n(j\omega)| \Big|_{\omega=0,03} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2500\omega^2}} \Big|_{\omega=0,03} = 0,5547 \\ |U(\omega)| \Big|_{\omega=0,03} &= 2 \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \Big|_{\omega=0,03} = 1,9999 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Končni rezultat je torej:

$$\boxed{\frac{T_A}{m} = \frac{\sigma_{G_{rel}}^2(\omega) |G(j\omega)|^2 |U(\omega)|^2}{|G_n(j\omega)|^2 \Phi_0} \Big|_{\omega=0,03} = 72,6723} \quad (2.16)$$

■

2.2 Analiza frekvenčnega odziva

Pri analizi frekvenčnega odziva identifikacijo izvajamo s sinusnim preizkusnim signalom:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) \quad (2.17)$$

Zaradi linearnosti sistema je tudi odziv sistema po preteku prehodnega pojava harmoničen signal enake frekvence kot vzbujalni signal, oba signala pa se razlikujeta po amplitudi in sta fazno premaknjena. Zaradi motenj se amplitude izhodnega signala in faznega zamika izhoda proti vhodu ne da izmeriti natančno. Tukaj bomo obravnavali dva postopka za ocenjevanje frekvenčnega odziva procesa, in sicer vrednotenje frekvenčnega odziva z vzorčevalnikom in metodo ortogonalne korelacije.

2.2.1 Vrednotenje frekvenčnega odziva z vzorčevalnikom z vzorčenjem v dveh časovnih trenutkih

Pri tem postopku je potrebno po preteku prehodnega pojava izmeriti (vzorčiti) izhodni signal v dveh časovnih trenutkih:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= nT_p = n\frac{2\pi}{\omega_0} \\ t_2 &= nT_p + \frac{T_p}{4} = (n + \frac{1}{4})\frac{2\pi}{\omega_0} \end{aligned} \right\} n \in \mathbb{N} \quad (2.18)$$

kjer je $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0}$ perioda vzbujalnega signala. Prvič izhod vzorčimo po preteku celega števila period vzbujalnega signala (n mora biti dovolj velik, da izhodni signal že harmonično niha), drugič pa ga vzorčimo četrt periode pozneje. Izmerjena vzorca sta neposredno povezana s frekvenčnim odzivom procesa pri frekvenci ω_0 :

$$\begin{aligned} y(t_2) &= U_0 |G(j\omega_0)| \cos \varphi = U_0 \operatorname{Re} \{G(j\omega_0)\} \\ y(t_1) &= U_0 |G(j\omega_0)| \sin \varphi = U_0 \operatorname{Im} \{G(j\omega_0)\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.2 Metoda ortogonalne korelacije

Slabost prejšnje metode je, da je zelo nerobustna na šum. V dveh vzorcih, ki ju uporabimo za izračun frekvenčnega odziva, je namreč prisoten tudi šum, ki se v celotnem obsegu (le normiran z U_0) prenese na oceno frekvenčnega odziva. Ideja metode ortogonalne korelacije je, da s povprečenjem signalov čez daljši časovni interval zmanjšamo vpliv šuma. Vzbujanje in odziv procesa sta enaka kot pri ocenjevanju frekvenčnega odziva z vzorčevalnikom:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \sin(\omega_0 t) \\ y(t) &= U_0 |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Iz signalov $u(t)$ in $y(t)$ lahko izračunamo korelacijski funkciji:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{uu}(\tau) &= \frac{U_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \\ \hat{\phi}_{uy}(\tau) &= \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \cos(\omega_0 \tau + \varphi(\omega_0))\end{aligned}\quad (2.21)$$

Namesto da bi v dveh točkah vzorčili signal $y(t)$, s čimer bi v meritev vnesli visoko stopnjo šuma, vzorčimo (oz. bolje povedano izračunamo) veličino $\hat{\phi}_{uy}(\tau)$ pri $\tau = 0$ in pri $\tau = -\frac{T}{4} = -\frac{\pi}{2\omega_0}$:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{uy}(0) &= \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \cos(\varphi(\omega_0)) = \frac{U_0^2}{2} \operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} \\ \hat{\phi}_{uy}(-\frac{\pi}{2\omega_0}) &= \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \sin(\varphi(\omega_0)) = \frac{U_0^2}{2} \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Računanje korelacijskih funkcij izvajamo po preteku prehodnega pojava, tako da izračunamo realni in imaginarni del frekvenčnega odziva po naslednjih formulah:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} &= \frac{2}{U_0 n T_p} \int_{T_s}^{T_s + n T_p} y(t) \sin(\omega_0 t) dt \\ \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} &= \frac{2}{U_0 n T_p} \int_{T_s}^{T_s + n T_p} y(t) \cos(\omega_0 t) dt\end{aligned}\quad (2.23)$$

pri čemer je n pozitivno celo število, T_p je perioda vzbujalnega signala ($\frac{2\pi}{\omega_0}$), T_s pa je čas, ko prehodnega pojava več ni mogoče zaznati.

Vpliv motenj pri ortogonalni korelaciji

Analizirali bomo naslednje vrste motenj pri identifikaciji z metodo ortogonalne korelacije:

1. Visokofrekvenčni kvazistacionarni šum je lahko:

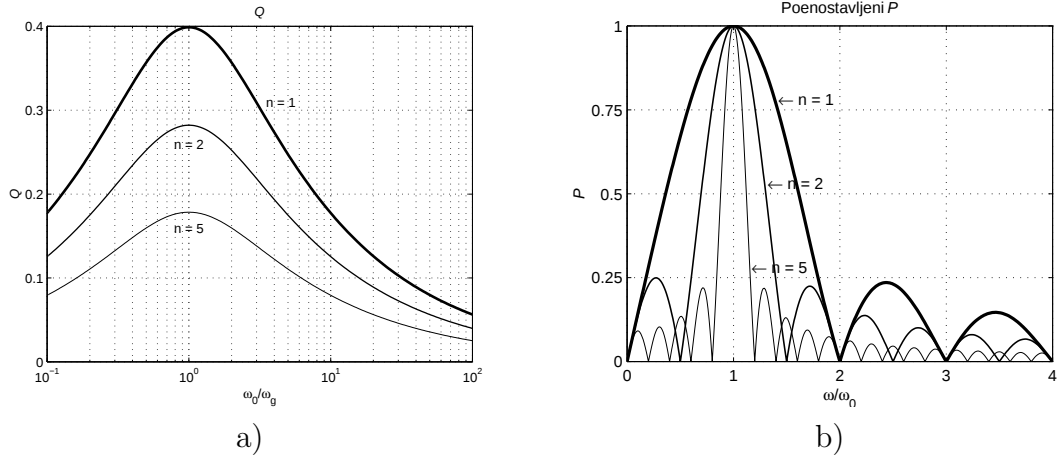
- Beli šum $n(t) = v(t)$:

$$\sigma_{G_{v_{abs}}}^2 = \frac{4\Phi_0}{U_0^2 n T_p} \quad (2.24)$$

Varianca napake ocene frekvenčnega odziva je torej premo sorazmerna spektralni močnostni gostoti šuma Φ_0 ter obratno sorazmerna kvadratu amplitude vzbujalnega signala U_0 in času opazovanja nT_p .

- Širokopasovni šum, dobljen iz belega šuma s filtriranjem preko filtra s pasovno širino $\omega_g = \frac{1}{T_g}$ (aproksimacija pri majhnih T_g in dolgih merilnih časih):

$$\sigma_{G_{n_{abs}}}^2(\omega_0) \approx \frac{4\Phi_{nn}(\omega_0)}{U_0^2 n T_p} \quad (2.25)$$



Slika 2.1: a) Odvisnost faktorja Q od razmerja med frekvenco vzbujalnega signala in lomno frekvenco šumnega filtra, če je na izhodu procesa prisoten širokopasoven šum; b) odvisnost faktorja P od razmerja med frekvenco motilnega signala in frekvenco vzbujalnega signala, če je na izhodu procesa prisotna harmonična motnja

Če upoštevamo formulo za spektralno močnostno gostoto širokopasovnega šuma, dobimo naslednji izraz za standardno deviacijo napake ocene frekvenčnega odziva:

$$\begin{aligned}\sigma_{G_{n_{abs}}}(\omega_0) &= E\{|\Delta G(j\omega_0)|\} \approx \frac{\sqrt{2\Phi_0\omega_g}}{U_0} Q \\ \sigma_{G_{n_{rel}}}(\omega_0) &= \frac{E\{|\Delta G(j\omega_0)|\}}{|G(j\omega_0)|} \approx \frac{\sqrt{2\Phi_0\omega_g}}{|G(j\omega_0)| U_0} Q\end{aligned}\quad (2.26)$$

kjer faktor Q podaja enačba

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_g}}}{\sqrt{\pi \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_g}\right)^2\right)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2.27)$$

slika 2.1a pa prikazuje njegovo odvisnost od normirane frekvence $\frac{\omega_0}{\omega_g}$.

2. Harmonična motnja oblike

$$n(t) = N_0 \cos(\omega t) \quad (2.28)$$

Standardna deviacija napake frekvenčnega odziva je:

$$\begin{aligned}\sigma_{G_{s_{abs}}} &= |\Delta G(j\omega_0)| \approx \frac{N_0}{U_0} P \\ \sigma_{G_{s_{rel}}} &= \frac{|\Delta G(j\omega_0)|}{|G(j\omega_0)|} \approx \frac{N_0}{U_0 |G(j\omega_0)|} P\end{aligned}\quad (2.29)$$

kjer faktor P podaja poenostavljena enačba

$$P \approx \frac{\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \left| \sin(\pi \frac{n\omega}{\omega_0}) \right|}{\left| 1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \right| \pi \frac{n\omega}{\omega_0}} \quad \omega \neq \omega_0 \quad (2.30)$$

odvisnost (2.30) pa je prikazana tudi na sliki 2.1b.

3. Nizkofrekvenčne motnje – lezenje:

$$n(t) = d(t) \quad (2.31)$$

Za dolge merilne čase (velik nT_p) je napaka frekvenčnega odziva

$$\Delta G(j\omega_0) = \frac{2j}{U_0 n T_p} D(\omega_0) \quad (2.32)$$

kjer je $D(\omega)$ Fourierov transform motnje $d(t)$. Varianca napake je torej:

$$\sigma_{G_d}^2(\omega_0) = \frac{4}{U_0^2 n^2 T_p^2} |D(\omega_0)|^2 \quad (2.33)$$

Varianca napake frekvenčnega odziva pri linearnem lezenju $n(t) = D_0 t$:

$$\sigma_{G_d}^2(\omega_0) = \frac{4D_0^2}{U_0^2 \omega_0^2} \quad (2.34)$$

Primer 2.2 Pri identifikaciji z metodo ortogonalne korelacije uporabimo vzbujalni signal amplitude 6 in frekvence 0,02 rad/s ter dobimo oceno absolutne vrednosti frekvenčnega odziva 0,0333. Določite potrebno število period identifikacije, če je izhod motil širokopasovni šum z mejno frekvenco 0,002 rad/s, standardno deviacijo 0,025 in srednjo vrednostjo 0, če želimo standardno deviacijo napake frekvenčnega odziva 1%.

Najprej prepíšimo podatke:

$$\begin{aligned} U_0 &= 6 \\ \omega_0 &= 0,02 \text{ rad/s} \\ |G(j\omega_0)| &= 0,0333 \\ \omega_g &= 0,002 \text{ rad/s} \\ \sigma_n &= 0,025 \\ \sigma_{G_{n_{rel}}}(\omega_0) &= 0,01 \\ \hline n &=? \end{aligned}$$

Enačba za standardno deviacijo napake ocene frekvenčnega odziva (2.26) pravi:

$$\sigma_{G_{n_{rel}}}(\omega_0) \approx \frac{\sqrt{2\Phi_0\omega_g}}{|G(j\omega_0)| U_0} \frac{\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_g}}}{\sqrt{\pi \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_g}\right)^2\right)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2.35)$$

Iz enačbe (2.35) izpeljemo n :

$$n \approx \frac{2\Phi_0\omega_g}{|G(j\omega_0)|^2 U_0^2} \frac{\frac{\omega_0}{\omega_g}}{\pi \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_g}\right)^2\right)} \frac{1}{\sigma_{G_{n_{rel}}}^2(\omega_0)} \quad (2.36)$$

Spektralno močnostno gostoto Φ_0 izpeljemo podobno kot v enačbi (2.14):

$$\Phi_0 = \frac{2\sigma_n^2}{\omega_g} = 0,625 \quad (2.37)$$

Če izračunamo n po enačbi (2.36), dobimo 19,7368. Ker pa vemo, da mora biti n pri metodi ortogonalne korelacije celo število, vzamemo prvo celo število, ki je večje od dobljenega rezultata. Končni rezultat je torej:

$$\boxed{n = 20} \quad (2.38)$$

■

Primer 2.3 *Kolikšno je najmanjše število period integracije, pri katerem standardna deviacija napake frekvenčnega odziva ne preseže 1%, če je v primeru 2.2 izhodni signal motil periodični signal frekvence 0,03 rad/s in amplitude 0,6.*

$$\begin{array}{l} U_0 = 6 \\ \omega_0 = 0,02 \text{ rad/s} \\ |G(j\omega_0)| = 0,0333 \\ N_0 = 0,6 \\ \omega = 0,03 \text{ rad/s} \\ \sigma_{G_{s_{rel}}}(\omega_0) = 0,01 \\ \hline n = ? \end{array}$$

Standardna deviacija napake frekvenčnega odziva je:

$$\sigma_{G_{s_{rel}}} \approx \frac{N_0}{U_0 |G(j\omega_0)|} \frac{\sqrt{2\frac{\omega}{\omega_0}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \left| \sin\left(\pi \frac{n\omega}{\omega_0}\right) \right|}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right|} \frac{1}{\pi \frac{n\omega}{\omega_0}} \quad (2.39)$$

Zadnji faktor v enačbi (2.39) je enak 0, če je izpolnjen pogoj:

$$\pi \frac{n\omega}{\omega_0} = l\pi \quad l \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1,5n = l \quad (2.40)$$

Iščemo torej najnižji celoštevilski večkratnik števila 1,5. To je seveda, kar drugi večkratnik, tako da je rešitev naloge:

$$\boxed{n = 2} \quad (2.41)$$

Pri $n = 2$ je namreč standardna deviacija napake frekvenčnega odziva enaka 0 in ne presega 1%. ■

Primer 2.4 *Kolikšno pa je najmanjše liho število period integracije, pri katerem standardna deviacija napake frekvenčnega odziva v primeru 2.3 ne preseže 1%.*

$$U_0 = 6$$

$$\omega_0 = 0,02 \text{ rad/s}$$

$$|G(j\omega_0)| = 0,0333$$

$$N_0 = 0,6$$

$$\omega = 0,03 \text{ rad/s}$$

$$\sigma_{G_{s_{rel}}}(\omega_0) = 0,01$$

$$n_{lih} = ?$$

Iz enačbe (2.39) lahko izpeljemo n :

$$n \approx \frac{N_0}{U_0 |G(j\omega_0)|} \frac{\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \left| \sin(\pi \frac{n\omega}{\omega_0}) \right|}{\left| 1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \right| \pi \frac{\omega}{\omega_0} \sigma_{G_{s_{rel}}}} \quad (2.42)$$

Če je n lih, je $\left| \sin(\pi \frac{n\omega}{\omega_0}) \right| = 1$, tako da iz enačbe (2.42) dobimo:

$$n \approx 194,9632 \quad (2.43)$$

Pravilni rezultat je najmanjše liho število, ki je večje od števila, izračunanega v enačbi (2.43), torej

$$\boxed{n = 195} \quad (2.44)$$

■

2.3 Korelacijska analiza

Znano je, da lahko izhod linearne časovno nespremenljivega sistema dobimo s konvolucijo impulznega odziva in vzbujalnega signala. Obratna pot je iskanje impulznega odziva, ki ga lahko poiščemo z dekonvolucijo. Težava je, da je opisani postopek zelo nerobusten na motnje. Korelacijske funkcije v dobršni meri zmanjšujejo vpliv šuma. Če upoštevamo konvolucijo med korelacijskimi funkcijami

$$\phi_{uy}(\tau) = \int_0^\infty g(t)\phi_{uu}(\tau - t)dt \quad (2.45)$$

bi lahko tudi tukaj impulzni odziv dobili z dekonvolucijo. Operacija dekonvolucije ni analitično rešljiva (lahko jo rešimo približno), zato uporabimo poseben vzbujalni signal. Sistem namreč vzbujamo z belim šumom. Njegova avtokorelacijska funkcija je:

$$\phi_{uu}(\tau) = \Phi_{u0}\delta(\tau) \quad (2.46)$$

zaradi česar enačba (2.45) preide v

$$\phi_{uy}(\tau) = \Phi_{u0}g(\tau) \quad (2.47)$$

Impulzni odziv procesa lahko izračunamo po naslednji enačbi:

$$g(t) = \frac{1}{\Phi_{u0}}\phi_{uy}(t) \quad (2.48)$$

Varianca napake ocene impulznega odziva se izračuna po naslednji formuli:

$$\sigma_g^2 = \text{var}[g(\tau)] = \frac{1}{T} \left[\int_0^\infty g^2(t)dt + \frac{\sigma_n^2}{\Phi_{u0}} \right] \quad (2.49)$$

Prvi člen v enačbi (2.49) je posledica lastne oz. inherentne statistične negotovosti, ki izvira iz naključne narave vzbujalnega signala. Drugi člen pa je posledica izhodne motnje $n(t)$, katere varianca je σ_n^2 .

Primer 2.5 *Proces analiziramo z belim šumom kot vhodnim signalom z metodo korelacijske analize. Kolikšen je potreben čas integracije, če naj bo relativna napaka rezultirajočega impulznega odziva 5%. Ocenjena prenosna funkcija je $G(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2}$.*

$$\frac{\sigma_g}{g_{max}} = 0,05$$

$$T = ?$$

Najprej poiščimo impulzni odziv sistema, ki je enak inverzni Laplaceovi transformaciji prenosne funkcije:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+3s+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right\} = 2e^{-t} + e^{-2t} \quad t \geq 0 \quad (2.50)$$

Potrebujemo tudi maksimalno vrednost frekvenčnega odziva, ki seveda nastopi ob $t = 0$:

$$g_{max} = 3 \quad (2.51)$$

Ker sistem ni moten s šumom, je σ_n v enačbi (2.49) enak 0, iščemo pa:

$$\int_0^\infty g^2(t)dt = \int_0^\infty (4e^{-2t} + 4e^{-3t} + e^{-4t})dt = 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = 3,5833 \quad (2.52)$$

Končni rezultat izpeljemo iz enačbe (2.49):

$$T = \frac{1}{\sigma_g^2} \int_0^\infty g^2(t)dt = \frac{1}{g_{max}^2 \left(\frac{\sigma_g}{g_{max}}\right)^2} \int_0^\infty g^2(t)dt = 159,26 \quad (2.53)$$

■

Primer 2.6 Kakšno je razmerje signal/šum $\frac{\Phi_{u0}}{\sigma_n^2}$, da je v primeru 2.5 prispevek izhodne motnje k varianci napake impulznega odziva enak prispevku lastne oz. inherentne statistične negotovosti. Kolikšna je takrat relativna napaka impulznega odziva?

$$\begin{aligned} T &= 159,26 \\ \frac{\int_0^\infty g^2(t)dt}{\frac{\sigma_n^2}{\Phi_{u0}}} &= ? \\ \frac{\frac{\Phi_{u0}}{\sigma_n^2}}{\frac{\sigma_g}{g_{max}}} &= ? \end{aligned}$$

Prvi člen v enačbi (2.49) je posledica lastne oz. inherentne statistične negotovosti, drugi člen pa je posledica izhodne motnje. Ker morata biti oba prispevka enaka, je razmerje signal/šum enako:

$$\frac{\Phi_{u0}}{\sigma_n^2} = \left[\int_0^\infty g^2(t)dt \right]^{-1} = 0,2791 \quad (2.54)$$

Ker se je varianca glede na prejšnji primer podvojila, se je standardna deviacija povečala za faktor $\sqrt{2}$, kar pomeni, da znaša 7,071%:

$$\frac{\sigma_g}{g_{max}} = 0,05\sqrt{2} = 0,07071 \quad (2.55)$$

■

Poglavje 3

Parametrične identifikacijske metode

3.1 Metoda najmanjših kvadratov

Metoda najmanjših kvadratov se zelo pogosto uporablja za ocenjevanje parametrov statičnih in dinamičnih sistemov. Denimo, da model sistema podaja enačba:

$$y = \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\theta} + v \quad (3.1)$$

kjer je $\boldsymbol{\psi}$ znan vektor dimenzije $n \times 1$, y je znan skalar, v neznan skalar (šum ali motnja), $\boldsymbol{\theta}$ pa je neznani vektor dimenzije $n \times 1$, ki ga iščemo:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Z drugimi besedami, iščemo n parametrov $\theta_i, i = 1, \dots, n$. Če imamo na razpolago eno enačbo, seveda ne moremo oceniti n neznanih parametrov. Če pa imamo $N \geq n$ enačb:

$$\begin{aligned} y_1 &= \boldsymbol{\psi}_1^T \boldsymbol{\theta} + v_1 \\ y_2 &= \boldsymbol{\psi}_2^T \boldsymbol{\theta} + v_2 \\ &\vdots \\ y_N &= \boldsymbol{\psi}_N^T \boldsymbol{\theta} + v_N \end{aligned} \quad (3.3)$$

lahko zapišemo matrično enačbo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{v} \quad (3.4)$$

kjer je:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1^T \\ \boldsymbol{\psi}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_N^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Če bi poznali $\mathbf{v}$, bi za rešitev enačbe (3.4) potrebovali n linearno neodvisnih enačb. Ker $\mathbf{v}$ ne poznamo, uporabimo za določanje rešitve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ veliko več kot n enačb. S tem rešitev ni eksaktna, pač pa izberemo tisto rešitev, pri kateri je izraz $\sum_{k=1}^N (y_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}})^2$ minimalen. Minimiziramo torej vsoto kvadratov odstopanj. Če je srednja vrednost motnje v enaka 0 in če motnja v ni korelirana s $\boldsymbol{\psi}$, podaja rešitev enačbe (3.4) v smislu najmanjših kvadratov naslednji izraz:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi})^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{y} \quad (3.6)$$

Izhodni pogrešek e je definiran kot razlika med izhodom sistema y in izhodom identificiranega sistema $\hat{y}$:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

Kovariančna matrika vektorja ocenjenih parametrov se izračuna po formuli:

$$\text{kov} [\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}] = (\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi})^{-1} \sigma_e^2 = (\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi})^{-1} \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (e_k - \bar{e})^2 \quad (3.8)$$

kjer je $\bar{e}$ srednja vrednost izhodnih pogreškov:

$$\bar{e} = \sum_{k=1}^N e_k \quad (3.9)$$

Na glavni diagonali kovariančne matrike se nahajajo variance ocen pripadajočih parametrov.

Kadar imamo opravka z dinamičnim sistemom, zapišemo v obliki (3.1) kar diferenčno enačbo sistema. Ker imamo običajno na razpolago meritve v več časovnih trenutkih, uporabimo čimveč meritev, tako da v kar največji meri zmanjšamo vpliv motenj.

Primer 3.1 Sistem opisuje diferenčna enačba:

$$y(k) = b_1 \sqrt{|u(k-1)|} - a_1 y(k-1) \quad (3.10)$$

Izmerjene vrednosti vhodnega in izhodnega signala so naslednje:

k	0	1	2	3	4
$u(k)$	1	2	0	-1	0
$y(k)$	0	1,9	1,1	-0,9	2,7

Po metodi najmanjših kvadratov izračunajte oceni parametrov a_1 in b_1 . Določite tudi standardni deviaciji obeh ocen.

Enačbo (3.10) lahko zapišemo za $k = 1, 2, 3, 4$. S tem dobimo matriko Ψ in vektor $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 1,1 \\ -0,9 \\ 2,7 \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1,9 \\ 0 & -1,1 \\ 1 & 0,9 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Ko enačbo (3.11) vstavimo v enačbo (3.6), dobimo:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 1,92 \\ 0,84 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\hat{a}_1 = 0,84, \hat{b}_1 = 1,92} \quad (3.12)$$

Sedaj moramo pri $k = 1, 2, 3, 4$ izračunati še $e(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \Psi^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}$. V ta namen sestavimo novo tabelo:

k	1	2	3	4
$y(k)$	1,9	1,1	-0,9	2,7
$\hat{y}(k)$	1,9162	1,1054	-0,9289	2,6762
$e(k)$	-0,0162	-0,0054	0,0289	0,0238
$e(k) - \bar{e}$	-0,0239	-0,0132	0,0211	0,0161

Srednja vrednost pogreška $e(k)$ je

$$\bar{e} = \sum_{k=1}^4 e(k) = 0,0078 \quad (3.13)$$

Varianca pogreška $e(k)$ je naslednja:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 (e(k) - \bar{e})^2 = 4,8369 \cdot 10^{-4} \quad (3.14)$$

Kovariančno matriko izračunamo po enačbi (3.8). Standardni deviaciji obeh ocen sta:

$$\boxed{\sigma_{a_1} = 0,0100 \quad \sigma_{b_1} = 0,0119} \quad (3.15)$$

■